DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

N. B. *Bien que certains résultats obtenus dans la partie* III *soient susceptibles de faciliter la résolution de* IV, *cette dernière partie peut être traitée tout à fait indépendamment des précédentes.*

I

Dans ce problème, on désigne par $\mathfrak{M}(p)$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre p à coefficients réels.

$I \in \mathfrak{M}(p)$ est la matrice unité; $U \in \mathfrak{M}(p)$ est la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1° Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, calculer la matrice U^n.

2° Soit E_p le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}(p)$ engendré par I et U. A et B étant deux éléments de E_p :

$$A = aI + a'U \; ; \qquad B = bI + b'U,$$

calculer le produit A.B; appartient-il à E_p?

3° Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la puissance n^e de la matrice $A = aI + a'U$ est un élément de E_p, et calculer ses composantes dans la base (I, U).

4° A quelles conditions doivent satisfaire les scalaires réels a et a' pour que la matrice $A = aI + a'U$ admette une inverse, A^{-1}, appartenant à E_p. Montrer alors que si A est inversible, son inverse appartient nécessairement à E_p. Dans cette hypothèse, calculer les composantes de A^{-1} dans la base (I, U).

II

1° Sur l'espace $\mathfrak{M}(p)$, on définit une norme en associant à toute matrice $M \in \mathfrak{M}(p)$, de coefficients m_{ij}, le nombre :

$$\| M \| = \sup_{i,j} | m_{ij} |$$

Montrer que cette définition satisfait aux axiomes des normes.

2° Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite $\{ M_n \}$, de coefficients $m_{ij}^{(n)}$, converge pour la distance associée à la norme précédente? Quels sont, dans ce cas, les coefficients m_{ij} de la limite M?

Montrer que, si la suite $\{ M_n \}$ est de Cauchy, elle converge.

3° Montrer :

a. que, si M est un élément de $\mathfrak{M}(p)$, et $\{ \lambda_n \}$ une suite dans $\mathbf{R}$ convergeant vers λ, on a :

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_n M = \lambda M$$

b. que, si $\{ M_n \}$ et $\{ M'_n \}$ sont deux suites d'éléments de $\mathfrak{M}(p)$ convergentes, M et M' leurs limites respectives, on a :

$$\lim_{n \to \infty} (M_n + M'_n) = M + M'$$

$$\lim_{n \to \infty} M_n . M'_n = M . M'.$$

4° Trouver, pour toute matrice $M \in \mathfrak{M}(p)$, un majorant du rapport

$$\frac{\| M^2 \|}{\| M \|^2}.$$

En déduire, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, un majorant du rapport $\dfrac{\| M^n \|}{\| M \|^n}$.

5° M étant un élément de $\mathfrak{M}(p)$, on associe à tout $n \in \mathbf{N}$ la matrice :

$$S_n(M) = I + \frac{1}{1!} M + \ldots + \frac{1}{n!} M^n$$

Pour quelles valeurs de $\| M \|$ la suite $\{ S_n(M) \}$ est-elle convergente?

Dans cette hypothèse, on appelle sa limite « exponentielle de M », et on la note exp M.

6° Soit A l'élément du sous-espace vectoriel E_p de $\mathfrak{M}(p)$ défini par :

$$A = aI + a'U$$

Calculer $S_n(A)$. En déduire exp A.

III

L'espace $\mathbf{R}^p$ étant rapporté à la base canonique, on désigne par u l'endomorphisme de cet espace défini par la matrice U étudiée dans la partie I.

1° Calculer les valeurs propres de u, avec leur ordre de multiplicité. Trouver le sous-espace propre de u associé à chacune des valeurs propres. En déduire que la base de $\mathbf{R}^p$ définie par la matrice de passage :

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & & 0 & -1 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \\ 0 & 0 & & 1 & -1 \\ -1 & -1 & & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

est une base de vecteurs propres de u.

2° On désigne par α l'endomorphisme de $\mathbf{R}^p$ défini, dans la base canonique, par la matrice $A = aI + a'U$ $(a \neq 0, a' \neq 0)$.

Quelles sont les valeurs propres de α, et le sous-espace propre associé à chacune d'elles? En déduire que le produit matriciel

$$\Delta = \sigma^{-1} A \sigma$$

est une matrice diagonale dont on précisera les éléments diagonaux.

3° P_n désignant un polynôme formel de degré n, ayant pour coefficients réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$, on associe à toute matrice $M \in \mathfrak{M}(p)$ la matrice : $P_n(M) = a_0 I + a_1 M + \ldots + a_n M^n$.

Calculer $P_n(\Delta)$. Démontrer que $P_n(A) = \sigma P_n(\Delta)\sigma^{-1}$.

Utilisant ces résultats, retrouver la matrice exp A.

IV

1° Dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé O, i, j d'axes Ox, Oy, on appelle D_r le « disque » défini par :

$$x^2 + y^2 < r^2,$$

et l'on pose :

$$I(r) = \iint_{D_r} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$$

Calculer $I(r)$, ainsi que sa limite lorsque r tend vers l'infini.

2° a et b désignant deux réels strictement positifs, tels que $a + 2b = 1$, on pose :

$$K(r) = \iint_{D_r} e^{-(a-b)(x^2+y^2) - 2bxy}\, dx\, dy$$

Montrer que

$$K(r) = \iint_{D_r} e^{-(aX^2 + Y^2)}\, dX\, dY$$

En déduire que

$$K(r) = \iint_{E_r} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy$$

E_r étant le domaine intérieur à l'ellipse de l'équation :

$$x^2 - ay^2 = ar^2$$

En déduire un encadrement de $K(r)$ et calculer sa limite lorsque r tend vers l'infini.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail